123 - Déterminant. Exemples et applications.

I) Déterminants et calculs [Gou] + [Mat L1]

1) Formes multilinéaires alternées, définition [Mat L1]

Def [Mat L1 542]

Prop : si on permute les vecteurs, faut multiplier par la signature de la permutation. Si les vecteurs sont liés, c'est nul. Invariance par ajout d'une CL d'autres vecteurs *(1^er point : on le fait pour les transpositions)*

Déf : déterminant d'une matrice (formule avec permutation)

Prop : c'est une forme multilinéaire alternée en les colonnes. C'est l'unique (à un scalaire près) *(pénible de montrer la multininéarité, on le fait pour la 1^ère colonne et c'est pareil pour les autres)*

2) Propriétés fondamentales [Mat L1]

Prop fondamentale : det d'un produit *(on considère f :M→det(AM). On vérifie que f est multilinéaire alternée en les colonnes de M. On a donc det(AB)=f(B)=f(In)f(B)=det(A)det(B))*

Corollaire : une matrice est inversible ssi son det n'est pas nul. Det est un mph de groupe.

Corollaire : le déterminant d'une matrice est invariant pas chgt de base. On peut donc parler de déterminant d'un endomph.

3) Outils de calcul [Mat L1]

- Développement par rapport à une ligne/colonne *(super pénible à montrer)*
- Utiliser les prof des formes multilinéaires alternées (ajouter des CL d'autres colonnes etc)
- Déterminant d'une matrice triangulaire
- Déterminant par blocs

4) Quelques déterminants célèbres [Gou]

Vandermonde [Gou 137] *(on multiplie chaque colonne par a_1*(la précédente), on développe par rapport à la 1^ère ligne, on factorise chaque colonne par (ai-a1) et on conclut par récurrence)*

Cauchy [Gou 143] (on décompose (b1-X)…(b_{n-1}-X)/(X+a1)…(X+an)

Déterminant circulant *(au lieu de calculer det(A), on calcule det(AW), où W=(w(i-1)(j-1), w racine n-ème de l'unité. On trouve detAW=qqch*detW, où detW non nul car Vandermonde, on trouve alors det(A) et c'est P(1)…P(w^n-1) où P=a0+a1X+…+anX^n)*

5) Déterminant et volume [Gri]

Volume

Inégalité Hadamard [Gou]

II) Applications en algèbre linéaire [LFA]

1) Inverse d'une matrice [LFA]

Déf : mineur, comatrice

Prop : inverse d'une matrice

2) Rang d'une matrice [LFA]

Déf : bordant

Si une matrice est de rang ≥ r+1, alors tout déterminant de taille r qui en est extrait admet un bordant non nul [LFA] *(ie on peut l'inscrire dans une matrice inversible de taille r+1)*

Th : M est de rang r ssi il existe un déterminant extrait de taille r non nul et que tous les bordants sont nuls [LFA]

3) Systèmes linéaires [LFA]

Déf : système compatible (qui a une solution au moins), homogène (deuxième membre nul). Système de Cramer si la matrice est inversible.

Prop : un système de Cramer a une unique sol. Formules de Cramer.

Prop : l'espace des solutions d'un système homogène est de dim n-r où r est le rang de la matrice *(c'est le noyau de la matrice en fait)*

Prop : pour les systèmes quelconques (pas homogènes), ils sont compatibles ssi… (relations avec le det)

4) Réduction d'endomorphismes

Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique scindé => endomph diagonalisable

Cv de suites de polygones

III) Applications diverses [LFA] + [Gou Alg] + [Gou An] + [Methodix] + [Szp] + [Gant]

1) Utilisation de la régularité du déterminant

Prop : le déterminant est un polynôme

Appl : GLn(R) et On(R) ne sont pas connexes

Prop : différentielle du déterminant

Déf : SLn

Prop : SLn est une sous variété, et sln={H tq tr(H)=0}

2) Déterminant et intégration

Formule du chgt de var

3) Déterminant et espaces préhilbertiens [Gou Alg] + [Gou An]

Déf : matrice de Gram

Prop : définie positive ssi famille libre

Prop : distance à un espace

Th : Müntz

4) Déterminant et formes quadratiques [Methodix] + [Szp] + [Gantmacher]

Trouver la signature (mineurs) [Methodix]

Formes de Hankel [Gantmacher]

Déf : discriminant [Szp]

Th : deux fq non dégénérées sur Fq^n sont équivalentes ssi elles ont même discriminant [Szp]

Le déterminant est une fq en dimension 2

Csq : isomorphisme exceptionnel SO(3)=PSL2(C)

5) Résultant [LFA]

Déf : résultant

Lemme : CNS pour que deux polynômes aient une racine commune

Prop : les polynômes ont une racine commune ssi le résultant est nul

Développements :
Th de Müntz [Gou Alg] + [Gou An] (***)
SO3(C) isomorphe à PSL_2(C) [???] (**)
Suite de polygones [???] (*)

Bibliographie :
[Mat L1]
[LFA]
[Gou An]
[Gou Alg]
[Methodix]
[Szp]
[Gantmacher]
[Gri] Grifone

Pas mis :
Frobenius Zolotarev
Produit vectoriel

Rapport du jury : le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leurs places dans cette leçon. D'une manière générale on attend pendant le développement l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants non triviaux et pas uniquement l'extraction d'un résultat du plan. Les interprétations géométriques du déterminant sont fondamentales. Cette leçon classique a été très mal traitée. Les candidats ont recopié de mauvais plans sur Internet en oubliant les propriétés importantes du déterminant ; volume, orientation, discussion du rang grâce aux bordantes. Signalons que les candidats qui ont proposé comme développement des thèmes trop éloignés de la leçon ont tous été sanctionnés. Par exemple le calcul de la distance à un sous-espace vectoriel ne peut pas constituer un développement substantiel. On ne peut pas présenter le théorème de Müntz sans présenter le calcul du déterminant de Cauchy préalablement. En fait il est inutile de faire tout le calcul, seul importe le quotient entre deux déterminants de Cauchy et celui-ci est très rapide à exposer.